P. G. Hancock. 14. 9. 1992 (1

11786

SUBSTITUTION CALCULUS

Forms of judgement

Γ : context

$\Gamma = \Delta$: context

$\gamma : \Delta \to \Gamma$

$\gamma = \delta : \Delta \to \Gamma$

$\Gamma \to A$: type

$\Gamma \to A = B$: type

$\Gamma \to a : A$

$\Gamma \to a = b : A$

$\Gamma \to B$: (A) type

$\Gamma \to B = C$: (A) type

Rules of inference

Context formation

$() : \text{context}$

$$\frac{\Gamma : \text{context} \qquad \Gamma \longrightarrow A : \text{type}}{(\Gamma, x : A) : \text{context}}$$

Thinning

$$\frac{\gamma : \Delta \longrightarrow \Gamma}{\gamma : \Theta \longrightarrow \Gamma} \quad (\Theta \text{ extension of } \Delta)$$

$$\frac{\gamma : \Theta \longrightarrow \Delta}{\gamma : \Theta \longrightarrow \Gamma} \quad (\Gamma \text{ restriction of } \Delta)$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow A : \text{type}}{\Delta \longrightarrow A : \text{type}}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow a : A}{\Delta \longrightarrow a : A}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow B : (A)\,\mathrm{type}}{\Delta \longrightarrow B : (A)\,\mathrm{type}}$$

(Δ extension of Γ)

Multiplication (composition)

$$\frac{\delta : \Theta \longrightarrow \Delta \qquad \gamma : \Delta \longrightarrow \Gamma}{\gamma\delta : \Theta \longrightarrow \Gamma}$$

$$\frac{\gamma : \Delta \longrightarrow \Gamma \qquad \Gamma \longrightarrow A : \mathrm{type}}{\Delta \longrightarrow A\gamma : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\gamma : \Delta \longrightarrow \Gamma \qquad \Gamma \longrightarrow a : A}{\Delta \longrightarrow a\gamma : A\gamma}$$

$$\frac{\gamma : \Delta \longrightarrow \Gamma \qquad \Gamma \longrightarrow B : (A)\,\mathrm{type}}{\Delta \longrightarrow B\gamma : (A\gamma)\,\mathrm{type}}$$

Associativity

$$\frac{\theta : \Lambda \to \Theta \quad \delta : \Theta \to \Delta \quad \gamma : \Delta \to \Gamma}{(\gamma\delta)\theta = \gamma(\delta\theta) : \Lambda \to \Gamma}$$

$$\frac{\delta : \Theta \to \Delta \quad \gamma : \Delta \to \Gamma \quad \Gamma \to A : \mathrm{type}}{\Theta \to (A\gamma)\delta = A(\gamma\delta) : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\delta : \Theta \to \Delta \quad \gamma : \Delta \to \Gamma \quad \Gamma \to a : A}{\Theta \to (a\gamma)\delta = a(\gamma\delta) : A(\gamma\delta) \ (= (A\gamma)\delta)}$$

$$\frac{\delta : \Theta \to \Delta \quad \gamma : \Delta \to \Gamma \quad \Gamma \to B : (A)\mathrm{type}}{\Theta \to (B\gamma)\delta = B(\gamma\delta) : (A(\gamma\delta))\mathrm{type} \ (= (A\gamma)\delta)}$$

Unit

$() : \Gamma \to \Gamma$

id

1

$$\frac{\gamma : \Delta \to \Gamma}{()\gamma = \gamma : \Delta \to \Gamma}$$

$$\frac{\gamma : \Delta \to \Gamma}{\gamma() = \gamma : \Delta \to \Gamma}$$

$$\frac{\Gamma \to A : \mathrm{type}}{\Gamma \to A() = A : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \to a : A}{\Gamma \to a() = a : A \quad (= A())}$$

$$\frac{\Gamma \to B : (A)\mathrm{type}}{\Gamma \to B() = B : (A)\mathrm{type} \quad (= A())}$$

Updating

$$\frac{\gamma : \Delta \to \Gamma \quad \Delta \to a : A\gamma}{(\gamma, x = a) : \Delta \to \Gamma; x : A}$$

Commutativity of substitution and updating

$$\delta : \Theta \to \Delta \qquad \gamma : \Delta \to \Gamma$$

$$\frac{\Delta \to a : A\gamma}{(\gamma, x=a)\delta = (\gamma\delta, x = a\delta) : \Theta \to \Gamma, x : A}$$

Analogue of β-conversion

Alt. 1

$$\frac{\gamma : \Delta \to \Gamma \qquad \Delta \to a : A\gamma}{\begin{cases} (\gamma, x=a) = \gamma : \Delta \to \Gamma \\ \Delta \to x(\gamma, x=a) = a : A\gamma \ (= A(\gamma, x=a)) \end{cases}}$$

Alt. 2

$$\frac{\gamma : \Delta \to \Gamma \qquad \Delta \to a : A\gamma}{\begin{matrix} \Delta \to y(\gamma, x=a) = y\gamma : B\gamma \ (= B(\gamma, x=a)) \\ \Delta \to x(\gamma, x=a) = a : A\gamma \ (= A(\gamma, x=a)) \end{matrix}}$$

($y : B$ ranges over the clauses in Γ)

Analogue of η-conversion

$$\frac{\gamma : \Delta \rightarrow ()}{\gamma = () : \Delta \rightarrow ()}$$

$$\frac{\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma, x : A}{\gamma = (\gamma, x = x\gamma) : \Delta \rightarrow \Gamma, x : A}$$

Analogue of the ζ-rule

$$\frac{\gamma : \Delta \rightarrow () \qquad \delta : \Delta \rightarrow ()}{\gamma = \delta : \Delta \rightarrow ()}$$

$$\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma, x : A \qquad \delta : \Delta \rightarrow \Gamma, x : A$$

$$\gamma = \delta : \Delta \rightarrow \Gamma$$

$$\frac{\Delta \rightarrow x\gamma = x\delta : A\gamma \; (= A\delta)}{\gamma = \delta : \Delta \rightarrow \Gamma, x : A}$$

Rules of type formation

$$\Gamma \rightarrow \mathrm{set} : \mathrm{type}$$

$$\frac{\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma}{\Delta \rightarrow \mathrm{set}\,\gamma = \mathrm{set} : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A : \mathrm{set}}{\Gamma \rightarrow \mathrm{elem}(A) : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma}{\Delta \rightarrow \mathrm{elem}(A)\gamma = \mathrm{elem}(A\gamma) : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A : \mathrm{type} \qquad \Gamma \rightarrow B : (A)\mathrm{type}}{\Gamma \rightarrow \mathrm{fun}(A, B) : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A : \mathrm{type} \qquad \Gamma \rightarrow B : (A)\mathrm{type} \qquad \gamma : \Delta \rightarrow \Gamma}{\Delta \rightarrow \mathrm{fun}(A, B)\gamma = \mathrm{fun}(A\gamma, B\gamma) : \mathrm{type}}$$

Variables

$$\Gamma \rightarrow x : A$$

($x : A$ is one of the clauses in Γ)

Constants

$$\Gamma \rightarrow c : A$$

$$\frac{\gamma : \Delta \rightarrow \Gamma}{\Delta \rightarrow c\gamma = c : A \; (= A\gamma)}$$

Application

$$\frac{\Gamma \rightarrow a : A \qquad \Gamma \rightarrow B : (A)\mathrm{type}}{\Gamma \rightarrow B(a) : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow a : A \qquad \Gamma \rightarrow b : \mathrm{fun}(A, B)}{\Gamma \rightarrow b(a) : B(a)}$$

Commutativity of substitution and application

$$\frac{\Gamma \rightarrow a : A \qquad \Gamma \rightarrow B : (A)\,\mathrm{type} \qquad \gamma : \Delta \rightarrow \Gamma}{\Delta \rightarrow B(a)\gamma = B\gamma(a\gamma) : \mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow a : A \qquad \Gamma \rightarrow b : \mathrm{fun}(A, B) \qquad \gamma : \Delta \rightarrow \Gamma}{\Delta \rightarrow b(a)\gamma = b\gamma(a\gamma) : B\gamma(a\gamma) \quad (= B(a)\gamma)}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, x : A \rightarrow B : \mathrm{type}}{\Gamma \rightarrow (x)B : (A)\,\mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \rightarrow b : B}{\Gamma \rightarrow (x)b : \mathrm{fun}(A, (x)B)}$$

β-conversion

$$\frac{\Gamma, x:A \rightarrow B:\text{type} \quad \Delta \rightarrow a:A}{\Delta \rightarrow ((x)B)(a) = B(x=a):\text{type}}$$

$$\frac{\Gamma, x:A \rightarrow b:B \quad \Delta \rightarrow a:A}{\Delta \rightarrow ((x)b)(a) = b(x=a) : B(x=a)}$$

$$(= ((x)B)(a))$$

(Δ extension of Γ)

β-conversion with an intervening substitution

$$\frac{\Gamma, x:A \rightarrow B:\text{type} \quad \gamma:\Delta \rightarrow \Gamma \quad \Delta \rightarrow a:A\gamma}{\Delta \rightarrow ((x)B)\gamma(a) = B(\gamma, x=a):\text{type}}$$

$$\frac{\Gamma, x:A \rightarrow b:B \quad \gamma:\Delta \rightarrow \Gamma \quad \Delta \rightarrow a:A\gamma}{\Delta \rightarrow ((x)b)\gamma(a) = b(\gamma, x=a)}$$

$$: B(\gamma, x=a) \; (= ((x)B)\gamma(a))$$

η-conversion

$$\frac{\Gamma \to B : (A)\mathrm{type}}{\Gamma \to B = (x)B(x) : (A)\mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \to b : \mathrm{fun}(A, B)}{\Gamma \to b = (x)b(x) : \mathrm{fun}(A, (x)B(x))}$$

$$(= \mathrm{fun}(A, B))$$

(x not in Γ)

ζ-rule

$$\frac{\Gamma \to B : (A)\mathrm{type} \quad \Gamma \to C : (A)\mathrm{type} \quad \Gamma, x : A \to B(x) = C(x) : \mathrm{type}}{\Gamma \to B = C : (A)\mathrm{type}}$$

$$\frac{\Gamma \to b : \mathrm{fun}(A, B) \quad \Gamma \to c : \mathrm{fun}(A, B) \quad \Gamma, x : A \to b(x) = c(x) : B(x)}{\Gamma \to b = c : \mathrm{fun}(A, B)}$$